Sada příkladů na záměnu limity a integrálu

Používáme následující věty:

Věta 1 (Leviho věta) *Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \nearrow f$, platí $\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$.*

Věta 2 (Zobecněná Leviho věta) *Buďte funkce f_n měřitelné na X $(n \in \mathbb{N})$ takové, že $f_n \nearrow f$ a $\int f_1 \, d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.*

Věta 3 (Leviho pro řady) *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Věta 4 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě) *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.*

Věta 5 (Lebesgueova pro řady) *Jsou-li f_n měřitelné, a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_n| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Příklady:

1. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, dx = 0.$$

2. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} \, dx = 1.$$

3. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \int_M f_n = \int_M \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pro
$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad M = (0,1),\ (1,\infty),\ (0,\infty)?$$

4. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} \cdot e^{-x} \cos x \, dx = 0.$$
Návod: výraz $\frac{\log(x+n)}{n}$ odhadněte polynomem nezávyslým na n a použijte Lebesgueovu větu.

5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\sqrt[n]{x}}\,dx.$$
Návod: uvažujte zvlášť intervaly $(0,1)$ a $(1,\infty)$. Na $(0,1)$ je rozhodujícím členem $\sqrt[n]{x}$, zde lze použít Leviho i Lebesgueovu větu. Na $(1,\infty)$ rozhoduje $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Pro jeho odhad zespoda použijte binomickou větu a následně použijte Lebesgueovu větu. I na $(1,\infty)$ lze použít Leviho větu, nicméně použití je poněkud náročnější.

6. Existuje posloupnost funkcí $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n\searrow 0$ taková, aby platilo $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n\neq 0$? Návod: zkuste nejdříve sestrojit posloupnost množin A_n takovou, že $A_n\supset A_{n+1}$ a $\lambda(A_n)=\infty$, $n\in\mathbb{N}$, a která splňuje $\bigcap\limits_n A_n=\emptyset$. Pak položte $f_n=\chi_{A_n}$.

7. Spočtěte
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx,\quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

8. Spočtěte
$$\lim_{a\to 1-}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\log(a-\sin x)}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

9. Spočtěte
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,\quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

10. Dokažte, že
$$\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}\,dx=-\frac{\pi^2}{6}.$$
Návod: pro první příklad použijte rozvoj $\log(1-x)$ v mocninnou řadu. Pomocí Leviho věty pak dokažte, že lze integrovat člen po členu.

11. Dokažte, že
$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}\,dx=\frac{\pi^2}{6}.$$
Návod: vytkněte $\frac{x}{e^x}$ a zbytek rozveďte do nekonečné řady pomocí vzorečku pro geometrickou řadu.

*12. Vypočtěte
$$\int_0^\infty\log(1-e^{-x})\,dx.$$
Návod: vhodnou substitucí převeďte na jeden z předchozích příkladů.

*13. Dokažte, že

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx)\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

pro $|b| < a$. Návod: $\sin(bx)$ rozveďte v Taylorovu řadu. Pro konvergenci použijte Lebesgueovu větu. Integrál lze spočítat i přímo.

*14. Ověřte pro $p, q > 0$, že

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

Návod: všimněte si, že můžeme uvažovat jen $x \in (0,1)$. To znamená, že člen $\frac{1}{1+x^q}$ lze rozvést pomocí vzorce pro součet geometrické řady. Pak už stačí použít Lebesgueovu větu s majorantou $\frac{2x^{p-1}}{1+x^2}$ (k jejímůž odvození použijeme vzoreček pro částečné součty geometrické řady). Možno použít i Leviho větu, ale zde je užitečné rozvést v geometrickou řadu s kvocientem x^2.

*15. Ověřte, že

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos(\sqrt{x})\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}.$$

Návod: $\cos(\sqrt{x})$ rozvedeme do Taylorovy řady a následné integrály počítáme per partes (můžeme si zároveň všimnout, že jde o integrály z definice Γ funkce (př. 1) a použít, co o této případně víme).

*16. Ověřte, že

$$\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\, dx = 1.$$

Návod: použijeme vzoreček pro logaritmus podílu a pak rozvedeme v Taylorovu řadu.

*17. Ověřte pro $|b| < a$, že

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(bx)}{x}\, dx = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Návod: rozvedeme $\sin(bx)$ v Taylorovu řadu, integrujeme člen po členu (Lebesgueova věta) pomocí per partes. Na závěr porovnáme s Taylorovou řadou pro $\arctan x$.

Všechny příklady jsou převzaty ze sbírky prof. Lukeše, kde naleznete i podrobnější verse mnoha návodů, jde po řadě o příklady $4,3$; $4,22$; $4,23(d)$; $4,8$; $4,7$; $4,13$; $4,15$; $4,19$; $4,18$; $4,25$; $4,26$; $4,46(a)$ a $4,47$.